

Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben

Prof. Dr. Peter Koepke

Serie 4

Dr. Philipp Schlicht

Gegeben sei eine nicht-leere Menge I . Eine Menge \mathcal{F} von Teilmengen von I heißt *Filter auf I* , falls die folgenden Aussagen gelten.

- (1) $I \in \mathcal{F}$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
- (2) Ist $X \in \mathcal{F}$ und $Y \subseteq I$ mit $X \subseteq Y$, so gilt $Y \in \mathcal{F}$.
- (3) Sind $X, Y \in \mathcal{F}$, so gilt $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

Im Folgenden sei \mathcal{F} ein Filter auf einer nicht-leeren Menge I und $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ eine Sequenz nicht-leerer Mengen. Wir bezeichnen die Mengen aller Funktionen $g : I \rightarrow V$ mit $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$ mit $\prod_{i \in I} A_i$. Es sei $\approx_{\mathcal{F}}$ die durch

$$g \approx_{\mathcal{F}} h \iff \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in \mathcal{F}$$

definierte Relation auf $\prod_{i \in I} A_i$.

Aufgabe 12 (2 Punkte). Beweisen Sie, dass $\approx_{\mathcal{F}}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Wir bezeichnen die $\approx_{\mathcal{F}}$ -Äquivalenzklasse von $g \in \prod_{i \in I} A_i$ mit $[g]_{\mathcal{F}}$ und die Menge aller $\approx_{\mathcal{F}}$ -Äquivalenzklassen mit $\prod_{\mathcal{F}} A_i$.

Es sei S eine erststufige Sprache und $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I \rangle$ eine Sequenz von S -Modellen. Wir definieren ein S -Modell $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ mit Trägermenge $\prod_{\mathcal{F}} |\mathfrak{M}_i|$ durch die folgenden Klauseln:

- (1) Ist v_m eine freie Variable von S , so definieren wir $v_i^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i} = [g]_{\mathcal{F}}$, wobei g die Funktion in $\prod_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit $g(i) = v_m^{\mathfrak{M}_i}$ für alle $i \in I$ ist.
- (2) Ist f ein n -stelliges Funktionssymbol von S , so definieren wir

$$f^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i}([g_0]_{\mathcal{F}}, \dots, [g_{n-1}]_{\mathcal{F}}) = [h]_{\mathcal{F}},$$

wobei h die Funktion in $\prod_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit

$$h(i) = f^{\mathfrak{M}_i}(g_0(i), \dots, g_{n-1}(i))$$

für alle $i \in I$ ist.

- (3) Ist R ein n -stelliges Relationssymbol in S , so definieren wir $R^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i}$ als die Menge aller $([g_0]_{\mathcal{F}}, \dots, [g_{n-1}]_{\mathcal{F}})$ in $(\prod_{\mathcal{F}} |\mathfrak{M}_i|)^n$ mit

$$\{i \in I \mid (g_0(i), \dots, g_{n-1}(i)) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in \mathcal{F}.$$

Wir nennen $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ das *reduzierte Produkt der $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I \rangle$ bezüglich \mathcal{F}* .

Aufgabe 13 (6 Punkte). Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Das Modell $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ ist wohldefiniert.
- (2) Ist t ein S -Term, so gilt $t^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i} = [g]_{\mathcal{F}}$, wobei g die Funktion in $\prod_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit $g(i) = t^{\mathfrak{M}_i}$ für alle $i \in I$ ist.

Aufgabe 14 (10 Punkte). Beweisen Sie die folgenden abgeleiteten Regeln des Sequenzenkalküls.

- (1) \vee -Elimination:
$$\frac{\Gamma \quad \varphi \vee \psi \quad \Gamma \quad \varphi \rightarrow \chi \quad \Gamma \quad \psi \rightarrow \chi}{\Gamma \quad \chi}$$
- (2) \exists -Elimination:
$$\frac{\Gamma \quad \varphi \frac{y}{x} \quad \psi \quad \exists x \varphi}{\Gamma \quad \psi}, \text{ wobei } y \notin \text{free}(\Gamma \cup \{\exists \varphi, \psi\}).$$
- (3) \neg -Elimination:
$$\frac{\Gamma \quad \neg \neg \varphi}{\Gamma \quad \varphi}$$
- (4) Transitivität:
$$\frac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi \quad \Gamma \quad \psi \quad \chi}{\Gamma \quad \varphi \quad \chi}$$
- (5) \exists -Elimination Antezedens:
$$\frac{\Gamma \quad \neg \neg \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}$$

Aufgabe 15. Leiten Sie die folgenden Tautologien im Sequenzenkalkül her.

- (1) (2 Punkte) $(\varphi \rightarrow \neg \neg \varphi) \wedge (\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi)$.
- (2) (Zusatzaufgabe, 4 Punkte) $\exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi$.
- (3) (Zusatzaufgabe, 4 Punkte) $\exists x (\varphi \rightarrow \forall x \varphi)$.